Durée : 4 heures
L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.
La feuille-réponse est à rendre en fin d'épreuve avec la copie.
Barème : 4 4 12

Exercice 1

i désigne le nombre complexe du module 1 dont $\frac{\pi}{2}$ est l'un des arguments.

1. On considère le nombre complexe $z_1 = -\sqrt{3} + i$.
   Calculer le module de z_1, et un argument de z_1.
2. (a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :
   $$z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$$
   (b) Écrire les solutions de l'équation sous forme trigonométrique.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les nombres complexes $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
   On note M_1 , M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3
   (a) Montrer que les points M_1 , M_2 et M_3 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.
   (b) Placer les points M_1, M_2 et M_3 dans le plan.
   (Faire le dessin **sur la copie** et non sur du papier millimétré.)

Exercice 2

Une agence de publicité veut tester l'efficacité d'une campagne d'affichage d'un nouveau produit A et pour cela réalise une étude auprès de 1000 personnes. Les résultats sont les suivants :

– 650 personnes ont vu une affiche ;
– 300 personnes ont acheté le produit A ;
– 100 ont acheté le produit sans avoir vu d'affiche.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de personnes qui	**ont acheté A**	**n'ont pas acheté A**	**Total**
ont vu une affiche			650
n'ont pas vu d'affiche	100		
Total	300		1000

2. Une personne est choisie au hasard parmi les 1000 personnes. Toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
   (a) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
   E_1 : «la personne choisie a acheté le produit A » ;
   E_2 : « la personne choisie a vu une affiche ».
   (b) Définir par une phrase l'événement $E_1 \bigcap E_2$. Déterminer la probabilité de l'événement $E_1 \bigcap E_2$.
   (c) Déterminer la probabilité de l'événement $E_1 \bigcup E_2$.

Problème

Le but du problème est d'étudier la position relative de deux courbes et de calculer l'aire du domaine plan compris entre ces dernières.
Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.
Sur la feuille réponse ci-jointe (cf. en dernière page), ont été tracées les courbes représentatives C et Γ respectivement des deux fonctions f et g, définies pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ,\ 3]$, par :

$$f(x) = x - \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = x - (\ln x)^2$$

Partie 1 : Étude des fonctions f et g.

1. (a) Déterminer, en justifiant vos calculs, la limite de f en 0. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?
   (b) On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ,\ 3]$. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f sur $]0\ ,\ 3]$.
2. On désigne par g' la fonction dérivée de g sur $]0\ ,\ 3]$. Calculer $g'(x)$.
   En admettant que $(x - 2\ln x)$ est positif sur $]0\ ,\ 3]$, en déduire que g est strictement croissante sur $]0\ ,\ 3]$.
3. Désigner sur la feuille-réponse (cf. dernière page), la courbe C et la courbe Γ.

Partie 2 : Position relative des deux courbes.

1. (a) Résoudre sur $]0\ ,\ 3]$, l'équation $g(x) = f(x)$.
   (b) En déduire les coordonnées des points d'intersection M et N des courbes C et Γ. Placer M et N sur la feuille-réponse.
2. (a) Résoudre sur $]0\ ,\ 3]$, l'inéquation $g(x) \geqslant f(x)$.
   (b) En déduire la position relative des courbes C et Γ sur l'intervalle $[1\ ,\ \mathrm{e}]$.

Partie 3 : Calcul d'une aire.

On désigne par D l'ensemble des points $M(x\ ,\ y)$ du plan tels que :

$$(1 \leqslant x \leqslant e) \quad et \quad (f(x) \leqslant y \leqslant g(x))$$

et par A son aire exprimée en cm^2.
On admet que, en unités d 'aire, on a : $A = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (g(x) - f(x)\mathrm{d}x$

1. Hachurer D sur la feuille-réponse.
2. Soit la fonction H définie sur $[1\ ,\ \mathrm{e}]$ par : $H(x) = -x(\ln x)^2 + 3x\ln x - 3x$.
   (a) Vérifier que la fonction H est une primitive de la fonction $g - f$ sur $[1\ ,\ \mathrm{e}]$.
   (b) Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de A.
   (c) En donner une valeur approchée au mm^2 près par excès.

Feuille réponse à rendre impérativement avec la copie